ОБОБЩЕННЫЕ ДИСКРИМИНАНТЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Богданов Дмитрий Валериевич

аспирант кафедры информационных технологий РЭУ им. Г. В. Плеханова. Адрес: ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова», 117997, Москва, Стремянный пер., д. 36. E-mail: bogdv@rambler.ru.

Некоторые важные задачи математической экономики могут быть решены методами теории игр. При анализе стратегий безкоалиационных игр часто требуется отыскание точек равновесия Нэша, которые могут быть найдены как решение системы полиномиальных уравнений. Известно, что для любого полинома существует однозначно определенный (с точностью до знака) *A*-дискриминант, зависящий от коэффициентов исходного полинома и содержащий информацию о его корнях. В работе предложен алгоритм вычисления многогранника Ньютона и коэффициентов *A*-дискриминанта в случае, когда исходный полином зависит от двух переменных и множество показателей его степеней не содержит внутренних точек.

Ключевые слова: безкоалиционные игры, точка равновесия Нэша, система полиномиальных уравнений, *A*-дискриминант, многогранник Ньютона, когерентная триангуляция.

GENERALIZED DISCRIMINANTS IN PROBLEMS OF THE MATHEMATICAL ECONOMICS

Bogdanov Dmitry Valerievich

post-graduate of department of information technologies, PRUE. Address: Plekhanov Russian University of Economics, 36 Stremyanny Lane, Moscow, 117997, Russian Federation. E-mail: bogdv@rambler.ru.

Some important problems of mathematical economics could be solved using the theory of games. When analyzing the strategies noncooperative games often requires finding Nash equilibrium points, which can be found as the solution of systems of polynomial equations. It is known that for any polynomial there exists a unique (up to sign) *A*-discriminant depending on the coefficients of the polynomial source containing information about his roots. In this article we propose an algorithm for computing Newton polytope and coefficients of the discriminant in case the original polynomial is dependent on two variables and a variety of indicators of its powers don’t include interior points.

Keywords: noncooperative games, Nash equilibrium point, system of polynomial equations, A-discriminant, Newton polytope, coherent triangulation.

Введение

Некоторые важные экономические задачи могут быть решены методами теории игр. В частности, это относится к моделированию биржевых торгов и конкурсных аукционов. Задачи теории игр часто приводят к необходимости отыскания так называемых точек равновесия, определение которых приводится ниже. Первоначальное определение было дано в классической работе [1].

Рассмотрим типичную безкоалиционную игру n участников с полной информацией на следующем примере. В отделах закупок конкурирующих компаний работают n менеджеров. Рынок рассматриваемых компаний является достаточно узким, поэтому менеджеры давно знакомы между собой и хорошо знают привычки и предпочтения друг друга. На большинстве специализированных аукционов посторонних участников нет. Каждый участник имеет набор из m стратегий, заключающихся в покупке лота с номером $1,\ldots,m$. Для максимизации выигрыша стратегии могут комбинироваться различными способами всеми участниками аукциона.

Запишем математическую модель рассмотренной игровой ситуации. Имеются n игроков, при этом у каждого из них имеется m стратегий. Обозначим через a_{ij} долю средств, отводимую игроком с номером $i=1,\ldots,n$ на актив с номером $j=1,\ldots,m$. При этом справедливы следующие соотношения:

$$a_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1 \tag{1}$$

Данная игра содержит n многомерных матриц выигрышей $A_J^{(i)} = \left(A_{j_1\ldots j_n}^{(i)}\right)$, $j_k = 1,\ldots,m$, размерности $\underbrace{m\times m\times\ldots\times m}_{n \text{ раз}}$. Определим выигрыш игрока с номером i:

$$V_i = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left(A_{j_1\ldots j_n}^{(i)} \cdot \prod_{k=1}^{n} a_{ij_k} \right)$$

Частный случай такой задачи при n = 3 был рассмотрен в главе 6 работы [3].

Определение 1. Точка с координатами $(a_{11},\ldots,a_{nm})$ называется *точкой равновесия Нэша,* если никто из игроков не может увеличить свой выигрыш сменой стратегии, пока стратегии других игроков остаются неизменными.

Иными словами, для всех наборов $(u_1,\ldots,u_m)$, где $u_1,\ldots,u_m \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{m} u_j = 1$ справедливо соотношение:

$$\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{m}\left(A^{(i)}_{j_1\dots j_n}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{ij_k}\right)\geq\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{m}\left(A^{(i)}_{j_1\dots j_n}\cdot u_i\cdot\prod_{k=1,\,k\neq i}^{n}a_{ij_k}\right).$$

С учётом соотношения (1), условия, определяющие точку равновесия Нэша, могут быть записаны следующим образом:

$$a_{is}\left(V_i-\sum_{j_1,\dots,[j_k],\dots,j_n=1}^{m}\left(A^{(i)}_{j_1\dots j_{s-1}sj_{s+1}\dots j_n}\cdot\prod_{k=1,\,k\neq i}^{n}a_{ij_k}\right)\right)=0.$$

Неизвестными величинами являются n значений выигрышей V_i и nm значений долей средств a_{is}, выделяемых игроком с номером i на покупку актива с номером s. Таким образом, процесс нахождения точек равновесия Нэша может быть сведен к решению системы из $n(m+1)$ полиномиальных уравнений с $n(m+1)$ переменной, где каждый полином является произведением линейного полинома и мультилинейного полинома степени $n-1$. Для эффективного решения подобных систем необходимо тщательное изучение понятия A-дискриминанта.

Корни полиномов и A-дискриминанты

Рассмотрим систему полиномиальных уравнений более общего вида:

$$\begin{cases} p_1(x_1,\dots,x_n)=0,\\ \quad\dots\\ p_m(x_1,\dots,x_n)=0.\end{cases}\qquad(2)$$

Здесь $p_i(x_1,\dots,x_n)=\sum c^{(i)}_{\alpha}x^{\alpha}=\sum c^{(i)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$ – полиномы с n переменными, где $\alpha\in A_i\subset\mathbf{Z}^n$. Некоторые частные случаи подобных систем хорошо изучены и для них существуют эффективные методики решения. Это, в частности, относится к системам линейных уравнений и полиномам с одним переменным. В общем случае решение подобных систем часто представляет собой сложную математическую задачу.

Напомним, что для любого полинома одного переменного $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ существует полином $D(p)$, называемый *дискриминантом.* Дискриминант $D(p)$ зависит от коэффициентов $a_0,\dots,a_n$ полинома p, однозначно определен (с точностью до знака), имеет целые коэффициенты и равен нулю, если p имеет кратный корень. Также известно, что если некоторый полином одного переменного имеет корень кратности k, то все его производные до порядка $k-1$ включительно также обращаются в нуль в этом корне. Естественным образом понятие дискриминанта можно распространить на случай двух и более переменных. При этом аналогом корня кратности *k* будет являться точка, в которой равны нулю полином и его градиент: $p(x) = \nabla p(x) = 0$ (см. главу 1 в [2]).

Определение 2. *A-дискриминантом* полинома $p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in A \subset \mathbf{Z}^n} c_\alpha x^\alpha$ называют неприводимый полином $D_A(p)$ с переменными c_α, $\alpha \in A$, который обращается в нуль лишь в случае, если существует $x \in (\mathbf{C}^*)^n$ такой, что $p(x) = \nabla p(x) = 0$.

В качестве примера рассмотрим полином $p(x, y) = ax^2 + bx + c + y(dx + e)$. Для вычисления *A*-дискриминанта потребуем выполнения следующих условий: $p(x) = \nabla p(x) = 0$. Таким образом, имеем систему уравнений вида

$$\begin{cases} p = ax^2 + bx + c + y(dx + e) = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} = 2ax + b + dy = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = dx + e = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, окончательно получим $D_A(p) = cd^2 - bde + ae^2$.

Многогранник Ньютона A-дискриминанта

Определение 3. *Выпуклой оболочкой множества M* называется наименьшее (относительно теоретико-множественной принадлежности) выпуклое множество M_C, содержащее M.

Определение 4. *Симплекс* в $\mathbf{R}^n$ есть выпуклая оболочка $n+1$ точки, которые не лежат в одной гиперплоскости и называются *вершинами* симплекса.

Примером симплекса в $\mathbf{R}^0$ является точка, в $\mathbf{R}^1$ – отрезок, в $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ – треугольник и тетраэдр соответственно.

Определение 5. *Триангуляцией T* многогранника *P* называется представление *P* в виде объединения конечного множества симплексов $S_0, \ldots, S_m$ таких что

1. вместе с любым симплексом $S_i \in T$ в *T* входят все его грани;
2. любые два симплекса $S_i, S_j \in T$ либо вообще не имеют общей точки, либо они пересекаются только по целой грани какой-либо размерности.

Определение 6. Триангуляция *T* называется *когерентной,* если существует строго выпуклая непрерывная кусочно-линейная функция $f(x)$, определенная на множестве $\left\{ x : x \in \bigcup_{i=0}^{m} S_i \right\}$, такая, что ее множество негладкости совпадает с $\bigcup_{i=0}^{m} \partial S_i$, где ∂S_i –

граница симплекса S_i.

Определение 7. *Многогранником Ньютона* N_p полинома p называется выпуклая оболочка множества A векторов его показателей.

Рассмотрим один из возможных способов эффективного вычисления многогранника Ньютона A-дискриминанта, основанный на применении следующей теоремы [2], а также сформулируем и докажем несколько теорем о когерентности триангуляции в частных случаях.

Теорема 1. Многогранник Ньютона дискриминанта полинома комбинаторно эквивалентен кубу. Вершины многогранника Ньютона дискриминанта взаимно-однозначно соответствуют когерентным триангуляциям на множестве A, причем вершины отрезков триангуляции находятся в показателях, соответствующих мономам из $p(x_1,\ldots,x_n)$.

Теорема 2. Любая триангуляция многоугольника P без внутренних точек является когерентной.

Доказательство. Рассмотрим некоторую триангуляцию многоугольника $P \subset \mathbf{R}^2$ без внутренних точек, содержащую треугольники $S_0,\ldots,S_m$ и определим аффинную функцию $f(x)$ расстояния от точки x с координатами (x_1, x_2) до треугольника S_k. Введем обозначения $f(x) = f_k(x)$, если $x \in S_k$ и $a_{S_k}(x)$ – ближайшая к x точка в треугольнике S_k, однозначно определенная для выпуклого множества.

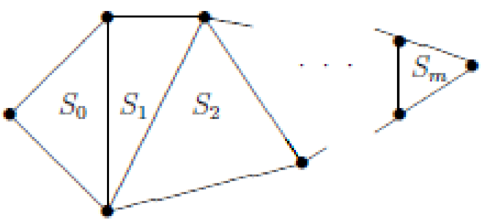

Рис. 1. Триангуляция многоугольника P без внутренних точек.

Из Рис. 1 видно, что в рассматриваемом случае всегда можно выделить треугольник S_0 такой, что две его стороны лежат на границе многоугольника P. Способ нумерации последующих треугольников легко указать из алгоритма построения списка всех триангуляций, приведенного ниже.

Положим $f_0(x) \equiv 0$ и покажем, что $f_1(x) = \operatorname{dist}(x, S_0)$ и $f_2(x) = \operatorname{dist}(x, S_1) + \operatorname{dist}(a_{S_1}(x), S_0)$. Для $k = 1,\ldots,m$ в общем случае имеем

$$f_k(x) = \operatorname{dist}(x, S_{k-1}) + \sum_{i=2}^{k} \operatorname{dist}\left(a_{S_{k-i+1}}\left(\ldots a_{S_{k-1}}(x)\ldots\right), S_{k-i}\right).$$

Исследуем поведение $f(x)$ на границах треугольников. При $x \in S_0 \cap S_1$ имеем $f_0(x)=0$ и $f_1(x)=\operatorname{dist}(x,S_0)=0$; при $x \in S_1 \cap S_2$ имеем $f_1(x)=\operatorname{dist}(x,S_0)$ и $f_2(x)=\operatorname{dist}(x,S_1)+\operatorname{dist}(a_{S_1}(x),S_0)=\operatorname{dist}(x,S_0)$, так как $\operatorname{dist}(x,S_1)=0$ и $a_{S_1}(x)=x$. Аналогично, при $x \in S_k \cap S_{k+1}$, где $k=0,\ldots,m-1$, получим

$$f_k(x)=\operatorname{dist}(x,S_{k-1})+\sum_{i=2}^{k}\operatorname{dist}\left(a_{S_{k-i+1}}\left(\ldots a_{S_{k-1}}(x)\ldots\right),S_{k-i}\right),$$

$$f_{k+1}(x)=\operatorname{dist}(x,S_k)+\sum_{i=2}^{k+1}\operatorname{dist}\left(a_{S_{k+1-i+1}}\left(\ldots a_{S_k}(x)\ldots\right),S_{k+1-i}\right)=f_k(x),$$

так как $\operatorname{dist}(x,S_k)=0$ и $a_{S_k}(x)=x$. Таким образом, построена непрерывная аффинно-кусочная функция $f(x)$, чьё множество негладкости совпадает с $\bigcup_{i=0}^{m}\partial S_i$. □

Теорема 3. Любая триангуляция многоугольника *P* с одной внутренней точкой является когерентной.

Доказательство. Рассмотрим некоторую триангуляцию многоугольника $P \subset \mathbf{R}^2$ с одной внутренней точкой *M*, содержащую треугольники $S_0,\ldots,S_m$ (Рис. 2). Если *M* не входит в рассматриваемую триангуляцию, то триангуляция является когерентной согласно теореме 2. В остальных случаях будем рассматривать нормальный веер многоугольника *P*, содержащий векторы нормалей $n_k(v_k-v_{k+1},u_{k+1}-v_k)$, $k=0,\ldots,m$, к ребрам, соединяющим вершины с координатами (u_k,v_k) и (u_{k+1},v_{k+1}) многоугольника *P*.

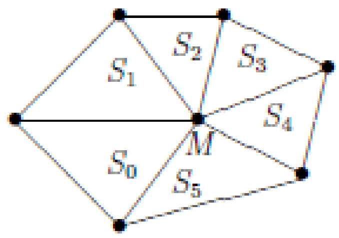

Рис. 2. Триангуляция многоугольника P с одной внутренней точкой.

Определим аффинную функцию $f(x,y)=\alpha_k((v_k-v_{k+1})x+(u_{k+1}-v_k)y)$, если $(x,y)\in S_k$, для некоторых постоянных α_k, которые будут определены ниже.

Покажем, что коэффициенты $\alpha_0,\ldots,\alpha_m$ могут быть выбраны так, что функция $f(x,y)$ является непрерывной на *P* и множество ее негладкости состоит из лучей $S_k \cap S_{k+1}$, то есть, выполняется условие $f_k(x,y)=f_{k+1}(x,y)$ при $(x,y)\in S_k \cap S_{k+1}$.

Положим $\alpha_0 = 1$. Для вычисления коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ необходимо решить m алгебраических уравнений вида $f_k(x, y) = f_{k+1}(x, y)$:

$$\alpha_k((v_k - v_{k+1})x + (u_{k+1} - v_k)y) = \alpha_{k+1}((v_{k+1} - v_{k+2})x + (u_{k+2} - v_{k+1})y)$$

Полагая $x = u_{k+1}$ и $y = v_{k+1}$, получим

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k \frac{(v_k - v_{k+1})u_{k+1} + (u_{k+1} - u_k)v_{k+1}}{(v_{k+1} - v_{k+2})u_{k+1} + (u_{k+2} - u_{k+1})v_{k+1}} = \alpha_k \frac{u_{k+1}v_k - u_k v_{k+1}}{u_{k+2}v_{k+1} + u_{k+1}v_{k+2}}$$

Для случая $k = m + 1$ имеем $\alpha_{m+1} = \alpha_m \dfrac{u_0 v_m - u_m v_0}{u_1 v_0 - u_0 v_1}$, откуда

$$\alpha_{m+1} = \alpha_0 \frac{u_1 v_0 - u_0 v_1}{u_2 v_1 - u_1 v_2} \cdot \frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{u_3 v_2 - u_2 v_3} \cdot \ldots \cdot \frac{u_m v_{m-1} - u_{m-1} v_m}{u_0 v_m - u_m v_0} \cdot \frac{u_0 v_m - u_m v_0}{u_1 v_0 - u_0 v_1} = \alpha_0 .$$

Таким образом, построена непрерывная аффинно-кусочная функция $f(x, y)$, чьё множество негладкости совпадает с $\bigcup_{i=0}^{m} \partial S_i$. □

Алгоритм построение списка триангуляций

На основе сформулированных теорем предложим алгоритм формирования списка всех когерентных триангуляций в случае выпуклого многоугольника без внутренних точек. Пусть $M = \{a_0, \ldots, a_n\}$ – множество всех вершин многоугольника, где отсчёт ведётся от некоторой произвольной вершины a_0 в положительном направлении обхода. Тогда $T(M)$ – искомое множество всех когерентных триангуляций выпуклого многоугольника с множеством вершин *M*, не содержащего внутренних точек. Рекурсивный алгоритм построения $T(M)$ задается следующим соотношением:

$$\begin{gathered} T(M) = \{\{a_0 a_1 a_n\} \cup T(\{a_1, \ldots, a_n\})\} \cup \\ \cup \bigcup_{k=2}^{n-1} (T(\{a_0, \ldots, a_k\}) \cup T(\{a_0, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\})) \end{gathered}$$

Искомое множество всех триангуляций $T(M)$ содержит два подмножества. В первое подмножество включены все триангуляции, содержащие симплекс $a_0 a_1 a_n$. Второе подмножество содержит лишь такие триангуляции, в которых сторона хотя бы одного из включенных в них симплексов является диагональю, выходящей из вершины a_0. Выход из рекурсии осуществляется при условии, что текущее подмножество содержит лишь тривиальную триангуляцию, то есть три точки.

Рассмотренный алгоритм был реализован на языке Visual C++. Вид главной формы программы представлен на Рис. 3.

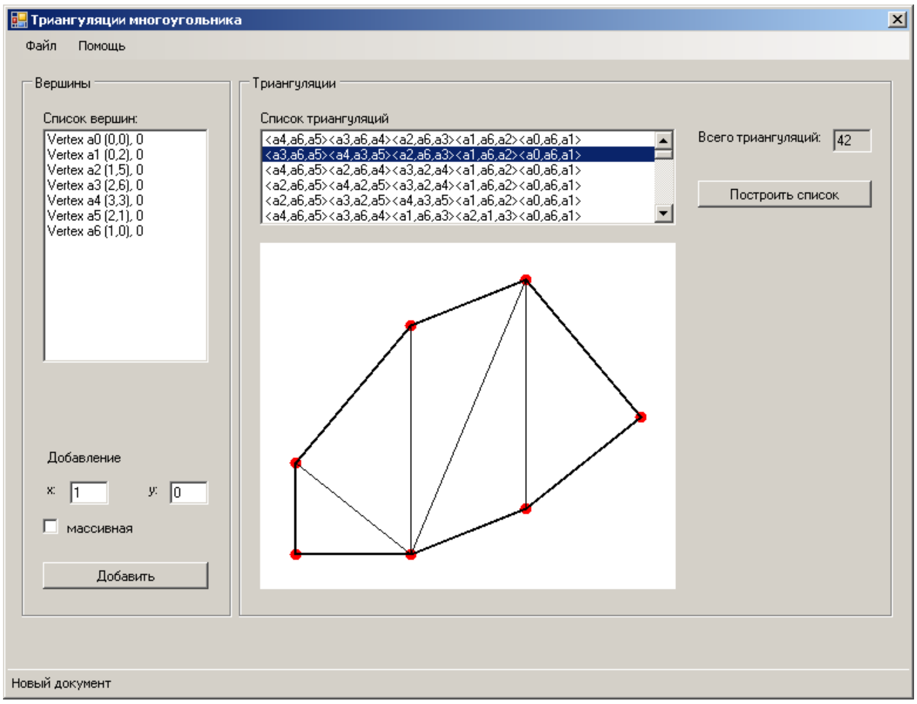

Рис. 3. Программа для построения списка триангуляций

Список литературы

1) Nash J. F. Non-cooperative games, Ann. Math., 1951, No. 54, pp. 286-295.
2) Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A.V. Discriminants, resultants and multidimensional determinants, Boston, Birkhauser, 1994.
3) Sturmfels B. Solving systems of polynomial equations, Providence, Rhode Island, Amer.Math.Soc, 2002.

Список литературы

1) Nash J. F. Non-cooperative games, Ann. Math., 1951, No. 54, pp. 286-295.
2) Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A.V. Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Boston, Birkhauser, 1994.
3) Sturmfels B. Solving systems of polynomial equations, Providence, Rhode Island, Amer.Math.Soc, 2002.